同余覆盖系

孙智宏

1．覆盖系的概念

设 $\mathbb{Z}$ 为整数集合， $\mathbb{Z}^+$ 为正整数集合， $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$, 约定

$$a(n) = a + n\mathbb{Z} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x \equiv a \pmod{n},\ x \in \mathbb{Z}\}.$$

覆盖系：用有限个等差数列 $a + n\mathbb{Z}$ 覆盖全体整数.

定义 1. 设 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^+$, $A = \{a_s(n_s)\}_{s=1}^k = \{a_1(n_1),\ a_2(n_2), \ldots, a_k(n_k)\}$. 若对每个 $x \in \mathbb{Z}$ 都存在 $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 使 $x \in a_s(n_s)$ (或 $x \equiv a_s \pmod{n_s}$), 则称 $A = \{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为同余覆盖系 (Covering System, CS), 并称 $n_1, \ldots, n_k$ 为覆盖系 A 的模.

例如： $\{0(2), 0(3), 1(4), 5(6), 7(12)\}$ 为 CS.

当 A 为 CS 但 A 的任何子集都不是 CS 时，称 A 为无多余 CS.

定义 2. 设 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^+$, $A = \{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$. 若对每个 $x \in \mathbb{Z}$ 都恰存在唯一的 $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 使 $x \in a_s(n_s)$ (或 $x \equiv a_s \pmod{n_s}$), 则称 $A = \{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为不相交覆盖系 (Disjoint Covering System, DCS).

例如： $\{0(2), 1(4), 3(8), 7(8)\}$ 为 DCS.

2．覆盖系的例子

(1) $\{0(2),0(3),1(4),5(6),7(12)\},\ k=5,\ N=12.$

(2) $\{0(2),0(3),1(4),3(8),7(12),23(24)\},$
$k=6,\ N=24.$

(3) $\{0(2),0(3),1(6),2(9),5(12),17(18),23(36)\},$
$k=7,\ N=36.$

(4) $\{0(2),0(3),1(4),7(8),2(9),5(18),19(24),35(36)\},$
$k=8,\ N=72.$

(5) $\{1(2),1(3),0(4),1(5),2(6),4(10),$
$3(15),2(20),0(30)\},\quad k=9,\ N=60.$

(6) $\{1(2),2(4),1(5),4(8),2(10),8(16),$
$4(20),8(40),0(80)\},\quad k=9,\ N=80.$

(7) $\{1(2),1(3),2(4),2(6),3(9),6(18),9(27),$
$18(54),0(108)\},\quad k=9,\ N=108.$

(8) $\{1(2),2(3),2(4),4(8),7(9),8(16),10(18),$
$4(36),0(48)\},\quad k=9,\ N=144.$

(9) $\{1(2),1(3),2(4),2(6),4(16),6(18),12(36),$
$12(48),0(72)\},\quad k=9,\ N=144.$

(10) $\{1(2),1(3),2(4),2(6),8(16),12(24),16(32),$
$32(64),0(192)\},\quad k=9,\ N=192.$

(11) $\{0(2),0(3),0(5),1(6),0(7),1(10),1(14),$
$2(15),2(21),23(30),4(35),5(42),59(70),$
$104(105)\},\quad k=14,\ N=210.$

(12) $\{1(3),2(4),5(6),4(8),0(9),0(12),0(16),3(18),$
$3(24),33(36),8(48),15(72)\},$
$k=12,\ N=144,\ n_1=3.$

(13) $\{0(3),0(4),0(5),1(6),6(8),3(10),5(12),11(15),$
$7(20),10(24),2(30),34(40),59(60),98(120)\},$
$k=14,\ N=120,\ n_1=3.$

(14) $\{0(4),0(5),3(6),2(8),1(9),1(10),5(12),8(15),$
$13(18),7(20),6(24),14(30),25(36),6(40),43(45),$
$59(60),22(72),79(90),62(120),142(180),214(360)\},$
$k=21,\ N=360,\ n_1=4.$

(15) $\{0(5),1(5),2(10),7(10),3(15),8(15),4(20),9(20),$
$13(30),28(30),14(40),34(40),19(60),39(60),$
$59(120),119(120)\},\quad k=16,\ N=120,\ DCS.$

3．覆盖系的起源

问题：是否对每个大于 1 的奇数 n 总存在整数 k 与素数 p 使得 $n=2^k+p$?

1950 年 P.Erdos 引进同余覆盖系概念否定了这个猜想。利用覆盖系， Erdos 证明了存在一个全为奇数的等差数列，其中每一奇数都不是 2^k+p 的形式。

4．覆盖系的早期工作

覆盖系的主要问题是探讨覆盖系的模的结构与性质。

定理 1 **(Erdos)**. 设 $A=\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为覆盖系，则

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{n_s}\geq 1,$$

并且当 A 为不相交覆盖系时有

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{n_s}=1.$$

证明思想：令 $N=[n_1,n_2,\ldots,n_k]$, 则 $a_s(n_s)$ 恰覆盖 $\{0,1,\ldots,N-1\}$ 中 N/n_s 个数，故 $\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{N}{n_s}\geq N$, 并且当 A 为 DCS 时等号成立。

定理 2．$A=\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为不相交覆盖系，$n_1\leq n_2\leq\ldots\leq n_{k-1}\leq n_k$，则 $n_{k-1}=n_k$.

历史背景： Erdos 猜想不相交覆盖系 (DCS) 必有模相等，后来 Davenport 、 Mirsky 、 Newman 和 Rado 各自独立地证明了定理 2.

证明思想 (Znam): 不妨设 $a_s\in\{0,1,\ldots,n_s-1\}$. 当 $|z|<1$ 时

$$\sum_{s=1}^{k}\frac{z^{a_s}}{1-z^{n_s}}=\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=0}^{\infty}z^{a_s+rn_s}=\sum_{t=0}^{\infty}z^t=\frac{1}{1-z}.$$

令 $z\to e^{2\pi i\frac{1}{n_k}}$, 则 $\frac{z^{a_k}}{1-z^{n_k}}\to+\infty$, 故必有 $n_s(1\leq s<k)$ 使 $\frac{z^{a_s}}{1-z^{n_s}}\to+\infty$, 即 $n_s=n_k$.

定理 **3(Newman-Znam)**. 设 $A=\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为 *DCS*, $n_1\leq n_2\leq\ldots\leq n_k$, p 为 n_k 的最小素因子, 则 A 的最后 p 个模相等, 即有 $n_{k-p+1}=\cdots=n_{k-1}=n_k$.

历史背景：1969 年 Znam 猜想定理 3, 后来 Znam 给了一个错误证明，1971 年 Newman 证实了这一结果， 1991 年孙智伟把该结果推广为：若 $A=\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为 DCS, $n_1\leq\cdots\leq n_{k-l}<n_{k-l+1}=\cdots=n_k$, 则

$$l\geq\min_{1\leq s\leq k-l}\frac{n_k}{(n_s,n_k)}\geq\max\left\{p,\frac{n_k}{n_{k-l}}\right\}.$$

定理 **4.** 设 $\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为无多余 *CS*, $[n_1,\ldots,n_k]$ 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 则

$$k \geq 1+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(p_i-1).$$

历史背景：1966 年 J.Mycielski 和 W.Sierpinski 提出猜想：设 $\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为 DCS, n_s 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 则 $k\geq 1+\sum_{i=1}^r\alpha_i(p_i-1)$. 当年 Znam 证实了这一猜想. 1968 年 Znam 对 DCS 猜想定理 4 的结果, 1974 年 I.Korec 把它推广到群的不相交覆盖系中, 1975 年 Znam 对一般的 CS 证明定理 4, 1990 年孙智伟给出这个结果在群覆盖系中的一般推广.

5. 覆盖系的两大难题

Erdos 问题 (1971): 对每个自然数 n, 是否都存在模均大于 n 的不同模覆盖系，即不同模覆盖系的最小模是否可任意大？

对不同模覆盖系的最小模 n_1, Davenport, Erdos 与 Fried 发现可有 $n_1=3$, Swift 发现可有 $n_1=6$, Selfridge 发现可有 $n_1=8$, Churchhouse 发现可有 $n_1=10$, Selfridge 发现可有 $n_1=14$, Krukenberg 发现可有 $n_1=18$, Choi 发现可有 $n_1=20$.

Erdos 悬赏 500 美元征解这个问题. 若答案是肯定的，则 Erdos 能证明：对每个正整数 r 均存在一个算术级数，其中每一项均不是 2^k+P_r 的形式，其中 P_r 至多有 r 个不同素因子.

奇覆盖问题 (Selfridge 猜想): 不存在模全是奇数的不同模覆盖系.

Erdos 悬赏 25 美元征求猜想证明， Selfridge 悬赏 500 美元征求反例.

Selfridge 证明：若存在模互不整除的不同模覆盖系，则存在模全是奇数的不同模覆盖系.

1967 年 A.Schinzel 证明：若 Selfridge 猜想成立，则对任何满足 $f(0)\neq 0$ 与 $f(1)\neq -1$ 与 $f(x)\not\equiv 1$ 的整系数多项式 $f(x)$, 有无穷多个自然数 n 使 $x^n+f(x)$ 在有理数域上不可约.

6. 覆盖系与单位分数的联系

定理 **5(**张明志, **1989).** 设 $\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为 *CS*, 则存在非空子集 $I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ 使

$$\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}\in\mathbb{Z}.$$

证明：设 $N=[n_1,\dots,n_k]$, 则

$$
\begin{aligned}
&\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k\text{为}CS\\
&\iff \prod_{s=1}^{k}\left(1-e^{2\pi i\frac{x-a_s}{n_s}}\right)=0,\ x=0,1,\dots,N-1\\
&\iff \sum_{I\subseteq\{1,2,\dots,k\}}(-1)^{|I|}e^{2\pi i\sum\limits_{s\in I}\frac{x-a_s}{n_s}}=0,\ 0\le x\le N-1\\
&\Longrightarrow \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{I\subseteq\{1,2,\dots,k\}}(-1)^{|I|}e^{2\pi i\sum\limits_{s\in I}\frac{x-a_s}{n_s}}=0\\
&\Longrightarrow \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\dots,k\}\\ \sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}\in\mathbb{Z}}}(-1)^{|I|}e^{-2\pi i\sum\limits_{s\in I}\frac{a_s}{n_s}}=0\\
&\Longrightarrow \text{存在}I\ne\emptyset\text{使}\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

定理 6(孙智伟， 1995). 设 $A=\{a_1(n_1),\dots,a_k(n_k)\}$, $\{x\}$ 为 x 的小数部分,

$$S=\left\{\left\{\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}\right\},\quad I\subseteq\{1,2,\dots,k\}\right\},$$

则

$$A\text{为覆盖系}\iff 0,1,\dots,|S|-1\text{被 }A\text{ 覆盖}.$$

推论 1. 若 $A=\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 能覆盖 $0,1,\dots,2^k-1$, 则 A 为覆盖系.

历史背景： 1962 年 Erdos 猜想推论 1 的结果， 1969 年 R.B.Crittenden 与 C.L.Vanden Eynden 给出这个猜想的复杂证明.

定理 7 (孙智伟， 1995). 设 $\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为 CS, 则对任给 $J\subseteq\{1,2,\dots,k\}$ 存在 $I\subseteq\{1,2,\dots,k\}$ 使 $I\ne J$ 且

$$\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}-\sum_{s\in J}\frac{1}{n_s}\in\mathbb{Z}.$$

当 $J=\emptyset$ 时定理 7 退化为张明志的结果.

根据推论 1 可证

定理 8(孙智宏， 1994). 设 $A=\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为无多余覆盖系， $n_1\le\dots\le n_k$, $N=[n_1,\dots,n_k]$, 若 $N=n_k$, 则对任给 $r\in\{0,1,\dots,N-1\}$ 均存在相应指标集 $I\subseteq\{1,2,\dots,k-1\}$ 使

$$\sum_{s\in I}\frac{N}{n_s}\equiv r\ (\mathrm{mod}\ N),$$

即 $\left\{\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}\right\}=\frac{r}{N}$.

在定理 8 的启发下孙智伟获得一系列深刻结果．如：

定理 9(孙智伟， **1997**)．设 $\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为 *DCS*, 则对任一模 n_t 及 $r\in\{0,1,\ldots,n_t-1\}$ 均存在 $I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}-\{t\}$ 使

$$\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}=\frac{r}{n_t}.$$

定理 10(孙智伟， **1996**). 设 $\{a_1(n_1),\ldots,a_k(n_k)\}$ 为无多余 *CS*, 则对任一模 n_t 及 $r\in\{0,1,\ldots,n_t-1\}$ 均存在 $I,J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}-\{t\}$ 使

$$\left\{\sum_{s\in I}\frac{1}{n_s}-\sum_{s\in J}\frac{1}{n_s}\right\}=\frac{r}{n_t}.$$

未解决问题：设 $A=\{a_s(n_s)\}_{s=1}^k$ 为无多余覆盖系，是否对任一模 n_t 及 $r\in\{0,1,\ldots,n_t-1\}$ 均存在 $I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}-\{t\}$ 使 $\sum\limits_{s\in I}\frac{1}{n_s}-\frac{r}{n_t}\in\mathbb{Z}$?