费波那契数

孙智宏

1. Fibonacci数的定义

Fibonacci(费波那契)(1175-1250) 是十三世纪意大利数学家, 他在《算盘书》(1202) 中研究兔子繁殖问题时引入了今天以他命名的应用广泛的序列.

定义. *Fibonacci* 数 $\{F_n\}$ 由如下初值和递推关系给出：

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\ (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots).$$

Fibonacci 数的最初一些数值如下：

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$F_n:$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

与 Fibonacci 数相伴的是如下的 Lucas(卢卡斯) 序列 $\{L_n\}$:

$$L_0=2,\ L_1=1,\ L_{n+1}=L_n+L_{n-1}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots).$$

容易验证:

$$L_n=F_{n+1}+F_{n-1},\quad F_n=\frac{1}{5}(L_{n+1}+L_{n-1})$$

和

$$F_{-n}=(-1)^{n-1}F_n,\quad L_{-n}=(-1)^nL_n.$$

2. Fibonacci 数的通项公式

Euler 在十八世纪给出了 Fibonacci 数的如下母函数定理.

定理 **1.** 当 $|x|<2/(1+\sqrt5)$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

由此 Euler 导出

定理 **2(通项公式).** 设 n 是整数，则

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}.$$

Lucas 数列 L_n 的通项公式为

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3. Fibonacci数的恒等式

定理 3 (孙智宏， 1988). 设 k, n, s 为整数， m 为自然数，则

$$F_s^m F_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{(s-1)(m-j)} F_k^j F_{k-s}^{m-j} F_{js+n},$$

$$F_s^m L_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{(s-1)(m-j)} F_k^j F_{k-s}^{m-j} L_{js+n}.$$

在定理 3 中取 $m = 1$ 则得

定理 4(加法公式). 设 k, n, s 为整数，则

$$F_s F_{k+n} = F_k F_{n+s} - (-1)^s F_{k-s} F_n,$$

$$F_s L_{k+n} = F_k L_{n+s} - (-1)^s F_{k-s} L_n.$$

推论 1(Catalan). 设 k, n 为整数，则

$$F_{k+n} F_{k-n} = F_k^2 - (-1)^{k-n} F_n^2.$$

推论 2(邻项公式). 设 n 为自然数，则

$$F_{n+1} F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n.$$

推论 3. 设 k, n 为整数，则

$$F_{k+n} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n.$$

推论 4. 设 n 为整数，则
(1) $F_{2n} = F_n L_n$,
(2) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$,
(3) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$.

定理 5. 设 n 为自然数，则
(1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k F_k = -F_n$,
(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k L_k = L_n$,
(3) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$.

定理 **6.** 设 n 为自然数，则

$$L_n^2-5F_n^2=4(-1)^n,$$

并且 $(L_n,\ F_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ 恰是不定方程 $x^2-5y^2=\pm4$ 的全部正整数解.

4. Fibonacci数的最大公因子

Lucas(卢卡斯) 在十九世纪证明了如下漂亮结果:

定理 **7(Lucas).** 设 m,n 为自然数， (m,n) 为 m 与 n 的最大公因子，则

$$(F_m,\ F_n)=F_{(m,n)}.$$

推论 **5.** 设 m,n 为自然数， $m\neq2$, 则

$$F_m\mid F_n \iff m\mid n.$$

5. Fibonacci数在组合中的应用

定理 **8.** 设 n 为自然数，则

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}.$$

例如: $\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}=1+4+3=8=F_6.$

定理 **9.** 设 n 为自然数，则集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中不含相邻数字的子集个数为 F_{n+2}.

例如: $\{1,2,3,4\}$ 中不含相邻数字的子集为 $\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},$ $\{2,4\}$, 共有 $F_6=8$ 个.

定理 **10(孙智宏， 1992).** 设 n 为自然数， $r\in\{0,1,2,3,4\}$, 则

$$\begin{aligned}&\binom{n}{r}+\binom{n}{5+r}+\binom{n}{10+r}+\cdots\\&=\begin{cases}\frac{1}{5}(2^n+2(-1)^nL_n) & \text{当 } r\equiv3n \pmod 5 \text{ 时},\\ \frac{1}{5}(2^n+(-1)^nL_{n-1}) & \text{当 } r\equiv3n\pm1 \pmod 5 \text{ 时},\\ \frac{1}{5}(2^n-(-1)^nL_{n+1}) & \text{当 } r\equiv3n\pm2 \pmod 5 \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

定理 **11(孙智宏、孙智伟， 1992).** 设 p 为奇数， $r\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, 则

(1) 当 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时

$$\begin{aligned}&\binom{p}{r}+\binom{p}{10+r}+\binom{p}{20+r}+\cdots\\ &=\begin{cases}\frac{1}{10}(2^p+L_{p+1}+5^{\frac{p+3}{4}}F_{\frac{p+1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2} \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p-L_{p-1}+5^{\frac{p+3}{4}}F_{\frac{p-1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+2 \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p-L_{p-1}-5^{\frac{p+3}{4}}F_{\frac{p-1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+4 \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p+L_{p+1}-5^{\frac{p+3}{4}}F_{\frac{p+1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+6 \pmod{10}\ 时.\end{cases}\end{aligned}$$

(2) 当 $p\equiv 3 \pmod 4$ 时

$$\begin{aligned}&\binom{p}{r}+\binom{p}{10+r}+\binom{p}{20+r}+\cdots\\ &=\begin{cases}\frac{1}{10}(2^p+L_{p+1}+5^{\frac{p+1}{4}}L_{\frac{p+1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2} \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p-L_{p-1}+5^{\frac{p+1}{4}}L_{\frac{p-1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+2 \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p-L_{p-1}-5^{\frac{p+1}{4}}L_{\frac{p-1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+4 \pmod{10}\ 时,\\ \frac{1}{10}(2^p+L_{p+1}-5^{\frac{p+1}{4}}L_{\frac{p+1}{2}}) & 当\ r\equiv \frac{p-1}{2}+6 \pmod{10}\ 时.\end{cases}\end{aligned}$$

(3) 当 $r\equiv \frac{p-1}{2}+8 \pmod{10}$ 时

$$\binom{p}{r}+\binom{p}{10+r}+\binom{p}{20+r}+\cdots=\frac{1}{10}(2^p-2L_p).$$

6. Fibonacci数与矩阵的联系

定理 **12.** 设 n 为自然数，则

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}.$$

由此在两边取行列式即得邻项公式.

7. Fibonacci数的递推公式

定理 **13(孙智宏， 1993).** 设 n 为非负整数， f 为任一给定的函数，则

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(k)+(-1)^{n-k}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}f(s)\right)F_{n-k}=0, \tag{7.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(k)-(-1)^{n-k}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}f(s)\right)L_{n-k}=0. \tag{7.2}$$

定理 13 表明: Fibonacci 数 $\{F_n\}$ 与 Lucas 序列 $\{L_n\}$ 满足无穷多个递推关系.

8. Fibonacci数与连分数的联系

定理 **14.** F_n/F_{n+1} $(n=1,2,3,\ldots)$ 是连分数

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=[0,1,1,\ldots,]$$

的渐近分数.

由此有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

9. Fibonacci数的同余性质

定理 **15(Legendre,Lagrange).** 设 $p\neq 2,5$ 为素数, 则

$$F_{p-(\frac{p}{5})}\equiv 0 \pmod p,\ F_p\equiv(\frac{p}{5}) \pmod p,\ F_{p+(\frac{p}{5})}\equiv 1 \pmod p,$$

其中

$$(\frac{p}{5})=\begin{cases}1 & \text{当 } p \text{ 为 } 5k\pm 1 \text{ 形数时},\\ -1 & \text{当 } p \text{ 为 } 5k\pm 2 \text{ 形数时}.\end{cases}$$

定理 **16** (孙智宏、孙智伟, **1992**). 设 $p\neq 2,5$ 为素数, 则

$$F_{\frac{p-(\frac{p}{5})}{2}}\equiv\begin{cases}0 \pmod p & \text{当 } p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ 时},\\ 2(-1)^{[\frac{p+5}{10}]}(\frac{p}{5})5^{\frac{p-3}{4}} (\mathrm{mod}\ p) & \text{当 } p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ 时}.\end{cases}$$

且

$$F_{\frac{p+(\frac{p}{5})}{2}}\equiv\begin{cases}(-1)^{[\frac{p+5}{10}]}(\frac{p}{5})5^{\frac{p-1}{4}} (\mathrm{mod}\ p) & \text{当 } p\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ 时},\\ (-1)^{[\frac{p+5}{10}]}5^{\frac{p-3}{4}} \pmod p & \text{当 } p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

孙智宏猜想: 设 $p\equiv 3,7 \pmod{20}$ 为素数, 从而有整数 x 和 y 使得 $2p=x^2+5y^2$, 则

$$F_{\frac{p+1}{4}}\equiv\begin{cases}2(-1)^{[\frac{p-5}{10}]}\cdot 10^{\frac{p-3}{4}} \pmod p & \text{若 } y\equiv\pm\frac{p-1}{2} \pmod 8,\\ -2(-1)^{[\frac{p-5}{10}]}\cdot 10^{\frac{p-3}{4}} \pmod p & \text{若 } y\not\equiv\pm\frac{p-1}{2} \pmod 8.\end{cases}$$

此猜想等价于

$$L_{\frac{p+1}{4}} \equiv \begin{cases} (-2)^{\frac{p+1}{4}} \pmod p & \text{若 } y \equiv \pm\frac{p-1}{2} \pmod 8, \\ -(-2)^{\frac{p+1}{4}} \pmod p & \text{若 } y \not\equiv \pm\frac{p-1}{2} \pmod 8. \end{cases}$$

已知 $p < 3000$ 时上述猜想成立.

10. Fibonacci 商

定理 17 (孙智宏、孙智伟， **1992,1995**). 设 $p > 5$ 为素数，则

$$\frac{F_{p-(\frac{p}{5})}}{p} \equiv 2 \sum_{\substack{k=1 \\ 5|p+k}}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv \frac{2}{5} \sum_{\frac{p}{5}<k<\frac{p}{3}} \frac{(-1)^k}{k} \pmod p.$$

Wall-Sun-Sun 素数. 设 p 为奇素数, 满足 $p^2 \mid F_{p-(\frac{p}{5})}$, 则称 p 为 *Wall-Sun-Sun* 素数.

R.McIntosh 证明：当素数 $p < 2 \times 10^{12}$ 时 p 不是 Wall-Sun-Sun 素数.

11. Fibonacci数与二次型的联系

定理 18(孙智宏， **1992,1998**). 设 $p > 5$ 为素数， $\mathbb{Z}$ 为整数集合，则

(1) 当 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时

$$p \mid F_{\frac{p-1}{4}} \iff p = x^2 + 5y^2 \ (x, y \in \mathbb{Z})\text{且}4 \mid xy.$$

(2) 当 $p \equiv 1 \pmod 3$ 时

$$p \mid F_{\frac{p-1}{3}} \iff p = x^2 + 135y^2 (x, y \in \mathbb{Z}),$$
$$p \mid F_{\frac{p-1}{6}} \iff p = x^2 + 540y^2 (x, y \in \mathbb{Z}).$$

(3) 当 $p \equiv 2 \pmod 3$ 时

$$p \mid F_{\frac{p+1}{3}} \iff p = 5x^2 + 27y^2 (x, y \in \mathbb{Z}),$$
$$p \mid F_{\frac{p+1}{6}} \iff p = 5x^2 + 108y^2 (x, y \in \mathbb{Z}).$$

12. Fibonacci 数在 Hilbert 第十问题中的应用

1970 年苏联数学家 Matijasevič(马提雅塞维奇) 巧用 Fibonacci 数解决 Hilbert 第十问题, 即不存在判定任一整系数多项式方程是否有整数解的有限步算法.

13. Fibonacci数在优选法中的应用

在黄金分割法中人们使用 Fibonacci 数分割区间来快速寻找极值点。

14. Fibonacci数在积分近似计算中的应用

华罗庚与王元利用 Fibonacci 数构造二重积分的最佳近似计算公式.

15. 植物世界中的 Fibonacci 数

在某种向日葵的种子盘上的种子构成顺时针和逆时针螺线的条数往往是相继的两个 Fibonacci 数 (34,55),(89,144) 或 (144,233).

菠萝、冬青、球花、牛眼菊等许多植物的花的花瓣数恰为 Fibonacci 数. 如茉莉花有 3 个花瓣，毛茛属植物有 5 个，翠雀属植物为 8 个，万寿菊属植物有 13 个，紫菀属植物为 21 个，雏菊属植物为 34 、 55 或 89 个。