数学基础和数学哲学

孙智宏

一、三次数学危机

1、前两次数学危机

第一次数学危机：无理数的发现

毕达哥拉斯（ Pythagoras ）学派认为宇宙间的一切现象都可归为整数或整数之比，数是万物之源，万物皆数。

公元前五世纪 Pythagoras 学派成员 Hippasus（希帕苏斯）发现正方形的对角线不是两个整数之比，该发现否定了他们学派的信条，为此他被众人投入大海。

第二次数学危机：无穷小量的使用

Leibniz(莱布尼兹): 正的无穷小量是小于任何正数但不是零的量，负的无穷小量是大于任何负数但不是零的量。

导数可表为两个无穷小量之比 $(y' = dy/dx)$

贝克莱大主教：无穷小的幽灵

十八世纪：在微积分没有可靠基础的情况下受直觉和物理的指引大胆地扩展和应用微积分。

十九世纪： 1821 年 Cauchy(柯西) 奠定微积分的基础， Weierstrass(魏尔斯特拉斯) 创立实数理论和方法。

在 1900 年的国际数学家大会上，大数学家 Poincare(庞加莱) 夸耀说：“我们是否最终地达到了绝对严密性了呢？在它进程的每个阶段上，我们的先驱者们都相信他们已经达到了。如果他们是受骗了，那么难道我们就不会像他们一样受骗吗？”“在今天的分析中，如果我们小心翼翼地尽力严密，那么只有三段论法或诉诸纯粹数的直觉是不可能欺骗我们的，所以现在可以说绝对严密是已经达到了。”

2． Cantor 和集合论

Cantor(康托)， 1845 — 1918， 德国数学家。

1874 — 1884 年 Cantor 发表系列论文研究无穷集合。

定义 1 若两个无穷集合的元素间可建立一一对应，则称这两个集合是等势的，与自然数集等势的集合称为可数集，与自然数集不等势的无穷集称为不可数集。

例：全体平方数为可数集，有理数集为可数集，实数集为不可数集，两条线段上点可建立一一对应。 Cantor 还证明：直线上点与平面上点之间存在一一对应。

定义 2 若集合 A 同集合 B 的某个子集可建立一一对应，但集合 B 不能同集合 A 的任何子集建立一一对应，则称集合 B 大于集合 A 。

例如：实数集大于自然数集，一个集合的所有子集构成的幂集大于该集合。

我们证明 (0,1) 中实数不可数。若不然，则 (0,1) 中全部实数可列举如下：

$$a_1 = 0.p_{11}p_{12}\cdots,\ \ldots, a_k = 0.p_{k1}p_{k2}\cdots,\ \ldots$$

令 $b = 0.b_1b_2\cdots b_k\cdots$, 其中

$$b_k = \begin{cases} 4 & \text{当 } p_{kk} = 5 \text{ 时,} \\ 5 & \text{当 } p_{kk} \neq 5 \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $b \in (0,1)$ 且其第 k 位数字 b_k 与 a_k 的第 k 位数字 p_{kk} 不同, 故 $b \neq a_k (k = 1, 2, \ldots)$, 此与假设矛盾。

Cantor: 是否任两无穷集合都可比较大小 (良序定理)? 实数集的不可数子集是否与实数集等势 (连续统假设)?

Cantor 研究无穷集合，对无穷集合规定大小，并分若干层次，讨论无穷集合的诸多问题。这从根本上背离了数学中关于无穷的使用和解释的传统，从而引起了激烈的争论和严厉的谴责。

Dedekind(戴德金) 、 Hilbert(希尔伯特) 支持 Cantor 的集合论， Hilbert 称它为“数学理智之花、最高成就之一”。

Hilbert: 没有人能把我们从 Cantor 为我们创造的乐园中驱逐出去。

Poincare(庞加莱) ：无限集合论是邪气与病态的坟墓，下一代人将把集合论视为一种疾病。

Kronecker(库隆尼克) 称 Cantor 为骗子，处处排挤、攻击，阻挠 Cantor 到柏林工作，说集合论是神秘主义。由于受到 Kronecker 的迫害， Cantor 在 1884 年患了抑郁症，此后二十多年一直住在疗养院、精神病院，后死在精神病院。

集合论可作为全部数学的基础。因为非欧几何的相容性经 Klein(克莱茵) 模型归结为欧氏几何的相容性，而欧氏几何的相容性经解析几何归结为实数系的相容性。又数学分析的相容性经 Cauchy 的极限理论也归结为实数系的相容性。而实数系的相容性可归结为有理数系的相容性，有理数系的相容性又归结为算术的相容性，最后算术的相容性取决于集合论的相容性. 因此若集合论无矛盾，则全部数学就没有矛盾.

3． 集合论的悖论

Cantor 已经考虑由所有集合组成的集合，集合的集合通常称为类。

由所有书组成的类不是书，但目录的目录仍是目录，一类想法仍可以是想法，集合的集合仍是集合。因此有些集合 (类) 包含自身，有些则不包含自身。

1902 年 Russell(罗素) 提出如下灾难性的悖论，从而造成数学的第三次危机。

Russell悖论 设 M 表示一切包含自己为元素的那些集合组成的集合， N 表示一切不包含自己作为元素的集合组成的集合，则 $M \cap N = \emptyset$, 但有 $N \in N \iff N \in M$, 故引出矛盾。

Cantor 、 Russell 、 Poincare 等数学家认为，我们不能谈论一切集合的集合，定义一组元素的集合不能用到该集合自身，否则这种定义或陈述是含糊不清的、不合逻辑的。

不幸的是在数学中 Cantor 关于实数不可数的证明，分析中上下界的定义，闭区间上函数最大值的定义都用到这种说不清的集合，因此分析中可能包含矛盾。

如最小上界是根据一类包含了要定义上界的上界而定义的，函数在区间上的最大值定义为函数在该区间上所取值中最大者。

Russell 悖论有如下更通俗的陈述：

理发师悖论　某乡村有个理发师，声称他给本村所有不自己刮脸的人刮脸，而当然不给自己刮脸的人刮脸。有一天他突然发生疑问：“我自己的脸是谁刮的呢？”理发师陷入进退两难的窘境。

语义悖论：“我正在说谎”，“任何规则都有例外”。

Godel(哥德尔) 悖论　某人 A 在 1934 年 5 月 4 日只说一句话：“A 在 1934 年 5 月 4 日所说的每一句话都是假的.”

Richard 悖论 (理查德，1905)　把所有自然数分成两组，第一组中数可用不多于 100 个英文字母描写出来，第二组中数至少需要 101 个字母才能描述，易见第一组中至多包含 27^{100} 个数，故第二组非空，从而存在第二组中最小数。但对第二组中最小数，它可用少于 100 个字母如下描述： the least integer not describable in one hundred or fewer letters.

悖论的发现引起数学家的恐慌，他们互相通信讨论，寻求解决办法，而一直信仰数学力量的物理学家、工程师会怎样想呢？

Frege(弗雷格) ：当大厦即将竣工的时候基础却崩溃了。

实际上集合论定义在 1895 年就有问题，不能简单地把集合定义为不同事物的堆集。

二、集合论的公理化

1908 年 Zermelo（集梅罗）提出公理集合论，试图通过限制集合及其运算避免出现矛盾，该公理系统后经 Fraenkel(弗兰克尔， 1922) 和 von Neumann(冯·诺伊曼， 1925) 修改完善，今称为 ZFN 公理系统。

限制集合：只允许可靠的、安全的集合进入集合论，如空集、有限集、自然数集以及这些集合的并集、子集。

ZFN 公理系统包含九条公理：

1．如果两个集合含有同样的元素，那么它们相等。

2．存在着空集。

3．若 x 和 y 是集合，则无序对 $\{x, y\}$ 也是集合。

4．一组集合的并也是集合。

5．存在着无穷集。

6．任何可用理论的语言形式化的属性都可用来定义一个集合。

7．对任一集合都可作出其幂集。

8．选择公理：给定任意一组集合，总可从其中每个集合中选取一个元素构成一个新的集合。

9． x 不属于 x

ZFN 公理系统排除已知的矛盾，但无法证明不包含矛盾。

Poincare 评论说："为了防备狼，羊群已经圈起来了，可就是不知道羊圈里有没有狼。"

三、数学基础的争论

1、逻辑主义

代表人物： Russell(罗素), Whitehead(怀特黑德)

1903 年他们合著的《数学原理》过于复杂、庞大。他们试图从逻辑公理导出数学，而不依靠任何直观与数学公理。

0 的定义： 0 是空类的元素个数，而空类是不含元素的类。

Poincere: 零是满足一个永远不能满足的条件的物的数目。

在《数学原理》中 Russell 与 Whitehead 在第三百多页才能够从逻辑上导出 1 的定义。 Poincare 说：对于从来不懂得" 1 "的人，这是个可惊可叹的定义！

Poincare: 逻辑派的理论并非不毛之地，它生长矛盾。

Boutroux(布特鲁) 讥讽说：逻辑是不可战胜的，因为谁要反对逻辑还得使用逻辑。

Wey1(外尔)：逻辑派对我们信仰力量的压制不下于早期教会神父和中世纪经院哲学家的教条。

De Morgan(德摩根): 数学和逻辑是精确科学的两只眼睛，数学派闭上逻辑眼睛，逻辑派闭上数学眼睛，而各自相信一只眼睛比两只眼睛看得更好。

逻辑派的主要功绩在于完全用符号的形式实现了逻辑的公理化。

2．直觉主义

代表人物： Kronecker(库隆尼克)， Poincare(庞加莱), Brouwer(布劳威尔)

德国数学家 Kronecker 在十九世纪七十年代和八十年代发表了他对数学的看法。他批评很多数学没有给出构造方法和判断准则，使之可用有限步骤去确定所研究的对象。 Kronecker 攻击 Weierstrass 、 Cantor 的工作，甚至认为无理数根本就不存在。他认为无理数理论只给出表面上的定义，不能令人满意。他曾对 Linderman(林德曼) 说：“你关于 π 的美丽的探讨有什么用呢？无理数根本就是不存在的。”

Kronecker: 上帝创造了自然数，其它一切都是人的工作。

Poincare 反对不能用有限个词来定义的概念。与 Kronecker 一样，他坚持所有的定义和证明都必须是构造性的。

Brouwer 在 1907 — 1926 年间发表一系列文章，阐述他的数学哲学，他把数学思维理解为构造程序，只受到基本数学直观的限制，不承认先验的逻辑原则。 Brouwer 反对使用排中律（反证法，非真即假），认为排中律只适于有限集合，不能对无穷集合使用，如：自然数集的子集 S 中不全是偶数不能推出 S 中一定存在奇数。

Weyl： Brouwer 启开了我们的眼睛，经典逻辑原是从有限集的数学中提取出来的，后来终于毫无道理地应用到无穷集合，而这正是集合论的堕落和原罪，现在正受到自相矛盾的惩罚，令人惊讶的是不是矛盾的出现，而是发现得如此之晚。排中律可能对上帝来说是有效的，他能够一下子检查完自然数的无穷序列，而对于人的逻辑，这一点却是做不到的。

Hilbert：禁止数学家使用排中律就象禁止拳击师使用拳头和天文学家使用望远镜一样，我看 Brouwer 和 Weyl 所称的对数学的改良实际上是一场暴动。

3．形式主义

代表人物： Hilbert(希尔伯特)

形式派倡导公理化运动，认为相容就存在，公理系统应满足独立性、相容性、完备性。

Hilbert 把实数公理化， Peano(皮亚诺) 把算术公理化。

Russell: 形式主义是形而上学。

Wey1: 形式主义是美妙的公式游戏，与直觉、认识无关。

Brouwer: 对数学严密性的问题，直觉主义者说在人类的理智中，而形式主义者说在纸上。

四、数学的灾难

数学史中充满了光辉的成就，但它同时也是一部灾难的记录，真理的丧失乃是最重大的悲剧。

1. Godel 不完备性定理

Godel(哥德尔)， 1906 — 1978，奥地利数学家， Aristotle(亚里斯多德) 以来最伟大的逻辑学家。

1930 年证明一阶谓词演算的完备性，使形式主义者倍受鼓舞。

1931 年发表《论数学原理中的形式不可判定命题及有关系统》，犹如掷下两枚炸弹，震惊全世界。

（ A ）对包含整数算术的任何数学系统，其相容性不可能通过逻辑原理而建立。

数学的相容性不可证明！(应该到数学之外去寻找，形式主义是错误的！)

Wey1：上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。

(B) **Godel不完备性定理　任何一个包含整数算术的公理体系要么是有矛盾的，要么是不完备的。**

这意味着存在不可判定命题，即定理正确，但不存在人为的证明。添加公理，也许解决，但又有新的不可判定命题。

Godel 不完备性定理是对排中律的否定，说明有些命题不能被证明，也不能被证伪。这有利于直觉主义（存在第三种情况）

Godel 定理在哲学、认识论方面的意义：人的认识是有局限性的，数学中存在不可知！

Hilbert(1900): 每一问题都有明确的解答，数学中没有不可知！

Demoulins: 没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有这两者，人们就什么也看不透。

2． 选择公理的独立性

Godel 不完备性工作造成的震憾还没有消散，新的震憾再一次来临，仍旧是 Godel

选择公理：给定任意一组集合，总可从其中每个集合中选取一个元素构成一个新的集合。

1940 年 Godel 证明选择公理与 ZFN 公理系统无矛盾，即不能被证伪。

1963 年 Cohen(柯恩) 证明选择公理不能在 ZFN 系统中得到证明。

选择公理独立于 ZFN 系统！

选择公理广泛应用于分析、拓扑、测度论、泛函分析及抽象代数的论证中，不接受选择公理将举步难艰。但承认选择公理又会有 Banach — Tarsk (巴拿赫一塔斯基) 悖论 (1924)：一个大球可分成有限份，然后重新拼装成一个小

球。

若否定选择公理，则每个线性集合都是 Lebesgue(勒贝格) 可测集。

象平行公理独立一样，令人无所适从。

3．勒文海姆－斯科伦 (Lowenheim — Skolem) 定理

1915，勒文海姆； 1920 — 1933，斯科伦

一个公理体系可包含多种截然不同的解释或模型，公理体系无法唯一确定我们想讨论的对象的特性。

Peano 整数公理不能唯一刻划整数特性。

假定人们打算开列一张特征表，并认为它可以刻划且仅仅刻划美国人，但令人吃惊的是，某人发现了一种动物，具有表上所列的全部特征，但它根本不同于美国人。

由此试图用公理系统来描述一类唯一的数学对象是不可能的。

4、非标准分析

二十世纪六十年代 Robinson(鲁宾逊) 引入非标准分析，新系统引进超实数，超实数包含实数和无穷小．无穷小此时是一个固定的数值。非标准分析通过放弃 Archimedes 公理 (阿基米德公理：对任一实数 a，总有在一个自然数 n，使 na 大于另一给定的实数 b) 而使 Leibniz 的无穷小合理化。

五．数学向何处去

1900 年以来数学基础的进展令人迷惑，目前数学状况杂乱无章，前进的道路上不再有真理的光芒。从 1930 年开始，无休无止的论战取代了友好合作的精神。

Weyl：关于数学最终基础和最终意义的问题还是没有解决，我们不知道向哪里去找它的最后解答，或者根本不能期望会有一个最后的客观回答，数学化很可能是人的一种创造性活动，它的历史性决定不容许完全的客观的有理化。

Russell(1901): 现代数学最主要的成就就在于发现了什么是真正的数学。

Klein(克莱因) 以如下的寓言概括了二十世纪有关数学基础的进展状况：

一座美丽的城堡已经矗立了许多个世纪，在城堡的地下室中生活着一群蜘蛛，突然一阵大风吹散了它们辛辛苦苦编织的一张繁复的蛛网，于是它们慌乱地加以修补，因为它们认为是蛛网支撑着整个城堡。

Hilbert：如果连数学思考都失败了，那么哪里还能找到可靠和真实的东西呢？

A.Weil（魏伊）：对我们 — 就是那些被希腊思想遗产的重担压弯肩膀的人，那些走在文艺复兴时期的英雄们所开辟的道路上的人来说，没有数学的文明是不可想象的。

数学中发现灾难性的悖论及所展示结构的绝非完美对数学和数学家是一个沉重的打击，但这还不是伤心的唯一原因，深深的怀疑以及数学家们之间的分歧来自于在过去一百年中研究方向的不同，大多数数学家从现实世界中退缩而关注于数学之中产生的问题，他们放弃了科学。以前数学是科学的王后，同时也是它们的女仆，存在纯粹数学但不存在纯粹的数学家，现在则不然，大多数数学家已经放弃了应用。数学正向抽象化、一般化、专门化和公理化方向发展。

Poincare：忘记外部世界的纯数学家就象是没有模特的画家。

Klein(克莱因)：数学就象是和平时期的一个伟大的兵工厂，橱窗里满是巧妙、精致和好看的各种玩艺，他们的真正动机和目标 — 战斗和征服敌人 — 已经几乎完全被遗忘了。

数学家们在试图决定什么是真正的数学以及在进行新的数学创造时应当以什么作为基础的问题上其困惑与日俱增。对数学大厦几种相互抵触的方法揭示了这样一个主要事实：不是只有一种而是有很多种数学，数学这个词应从多种意义上进行理解。

数学的未来从未有更多的希望，其本质也从来没有如此清楚。但数学家们将为解决这些基本问题而不懈努力，就象 Descartes(笛卡尔) 所说：“我将继续前进，直到我找到某种确定的东西 — 或者，最起码，直到我能确信没有什么是确定的。”